第1問

[1]

(1) $\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sqrt{3}\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\sin\theta$

∴①は

$\sin\theta>\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\sin\theta$

$\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta<0$

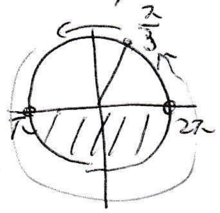
$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)<0$

$0\leqq\theta<2\pi$ より

$\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$ に注意

すると

$\pi<\theta+\frac{\pi}{3}<2\pi$



つまり $\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi$

(2) $25x^2-35x+k=0$ の解が

$x=\sin\theta, \cos\theta$ であるから

解と係数の関係から

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{35}{25}=\frac{7}{5}$ …①

$\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{25}$ …②

①より両辺を2乗すると

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{49}{25}$

∴ $\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$

∴②とから $k=12$

これを元の方程式に代入すると

$25x^2-35x+12=0$

$(5x-4)(5x-3)=0$

$x=\frac{4}{5}, \frac{3}{5}$

∴ $\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\frac{3}{5}$

であり $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ で $\sin\theta$ は

単調増加だから $\sin\theta$ の

値を考えて

$\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{4}{5}<\frac{\sqrt{3}}{2}$

(0.707) (0.8) (0.866)

をみたす. つまり あてはまるのは③

$\left(\frac{\pi}{4}\leqq\theta<\frac{\pi}{3}\right)$

[2] (1) $x>0$

$$x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}=-3$$

両辺を2乗すると

$$\left(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}\right)^2=9$$

$$x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}-2=9$$

$$\therefore\ x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}=11$$

更に

$$\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)^2=x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}+2$$

$$=11+2=13$$

$x>0$ より $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}>0$

$$\therefore\ x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{13}$$

$$x-x^{-1}=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$=\left(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+1+x^{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$=-3\times(11+1)=-36$$

(2) $\begin{cases}\log_3(x\sqrt{y})\leqq 5 & \cdots ②\\ \log_{81}\dfrac{y}{x^3}\leqq 1 & \cdots ③\end{cases}$

②は

$$\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 y\leqq 5$$

と変形できるから

$$X+\frac{1}{2}Y\leqq 5$$

$$\Leftrightarrow 2X+Y\leqq 10 \cdots ④$$

③は

$$\log_{81}y-3\log_{81}x\leqq 1$$

$$\frac{\log_3 y}{\log_3 81}-3\frac{\log_3 x}{\log_3 81}\leqq 1$$

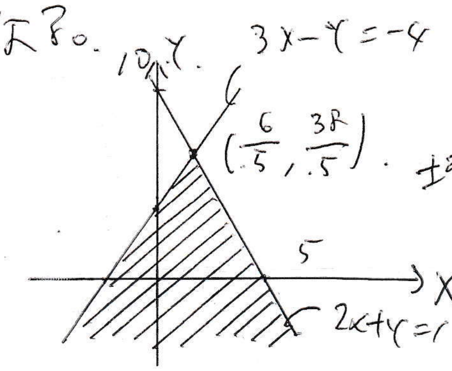
$$\frac{1}{4}\log_3 y-\frac{3}{4}\log_3 x\leqq 1$$

と変形できるから

$$\frac{1}{4}Y-\frac{3}{4}X\leqq 1$$

$$\Leftrightarrow 3X-Y\geqq -4 \cdots ⑤$$

∴④⑤を同時にみたす点(X,Y)の領域を図示すると下のようになる。



境界を含む

∴Yのとりうる最大の整数値は $\frac{38}{5}$ をこえない最大の整数だから

7

また、条件から領域内でと座標が7になる箇所を考えれば、Xとして考えられる最大の値は直線 $2X+Y=10$ 上の点なれ。

$2X+7=10$ より

$$X=\frac{3}{2}$$

$\therefore X=\log_3 x$ であり

$x=3^X$ と表せるから

求める最大の整数 x は

$$3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$$

をこえない最大の整数なので

$x=5$ //

第2問

$a>0$.

$f(x)=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$.

$C: y=x^2+2x+1$.

$D: y=f(x)$.

(1) $g(x)=x^2+2x+1$ とおくと.

$g'(x)=2x+2$

l は $(t,\ t^2+2t+1)$ で C と接する から. l の傾きは.

$g'(t)=2t+2$.

∴ l の方程式は.

$y=(2t+2)(x-t)+t^2+2t+1$

$=(2t+2)x-2t^2-2t+t^2+2t+1$

$=(2t+2)x-t^2+1$ …①

又. $f'(x)=2x-(4a-2)$

l は $(s,\ f(s))$ で D と接する から. l の傾きは.

$f'(s)=2s-(4a-2)$.

∴ l の方程式は.

$y=\{2s-(4a-2)\}(x-s)+s^2-(4a-2)s+4a^2+1$

$=(2s-4a+2)x-2s^2+4as-2s+s^2-(4a-2)s+4a^2+1$

$=(2s-4a+2)x-s^2+4a^2+1$ …②

①, ② は同じ直線だから. 係数を比較すると.

$$\begin{cases} 2t+2=2s-4a+2 \\ -t^2+1=-s^2+4a^2+1 \end{cases}$$

すなわち.

$$\begin{cases} t=s-2a \\ -t^2=-s^2+4a^2 \end{cases}$$

$-(s-2a)^2=-s^2+4a^2$.

$-(s^2-4as+4a^2)=-s^2+4a^2$.

$4as=8a^2$.

$s=2a$ (∵ $a>0$).

∴ $t=2a-2a=\underline{0}$.

つまり l の方程式は.

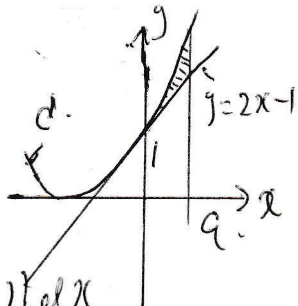
$y=2x+1$.

(2) C, D の交点の x 座標は y を消去すれば.

$x^2-(4a-2)x+4a^2+1=x^2+2x+1$.

$4ax=4a^2$.

$x=a$.

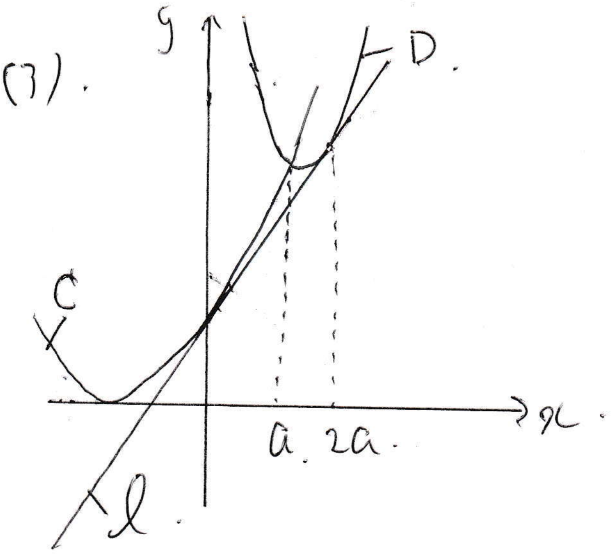


S は右図斜線部 だから.

$S=\int_0^a \{x^2+2x+1-(2x-1)\}dx$

$=\int_0^a x^2 dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{a^3}{3}$

(3).



$a \geqq \frac{1}{2}$ より C, D, l を図示すると

上図のようになり

・$a > 1$ のとき

$T = \int_0^1 \{x^2+2x+1-(2x+1)\}dx$

$= \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} \leqq a < 1$ のとき

$1 \leqq 2a < 2$ だから

$T = \int_0^a \{x^2+2x+1-(2x+1)\}dx$

$+ \int_a^1 \{x^2-(4a-2)x+4a^2+1-(2x+1)\}dx$

$= S + \int_a^1 (x-2a)^2 dx$

$= \frac{a^3}{3} + \left[\frac{1}{3}(x-2a)^3\right]_a^1$

$= \frac{a^3}{3} + \frac{1}{3}(1-2a)^3 + \frac{a^3}{3}$

$= \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}(1-6a+12a^2-8a^3)$

$= -2a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3}$

(4).

$U = 2T - 3S$.

$= 2(-2a^3+4a^2-2a+\frac{1}{3})$

$- 3 \cdot \frac{a^3}{3}$

$= -5a^3+8a^2-4a+\frac{2}{3}$

$\frac{dU}{da} = -15a^2+16a-4$

$\frac{dU}{da} = 0$ として

$-15a^2+16a-4 = 0$

$15a^2-16a+4 = 0$

$(5a-2)(3a-2) = 0$

$a = \frac{2}{5}, \frac{2}{3}$

$\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ より

$a = \frac{2}{3}$

∴増減表は下のようになる

a	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
U'	/	$+$	0	$-$	/
U		↗		↘	

つまり U は $a = \frac{2}{3}$ で極大かつ最大となるので

その最大値は

$-5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$

$= \frac{-40+96-72+18}{27} = \frac{2}{27}$

第3問

$a_1=0$.

$$a_{n+1}=\frac{n+3}{n+1}\{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)\} \quad \cdots ①$$

(1) $$a_2=\frac{1+3}{1+1}\{3a_1+3^2-(1+1)\cdot(1+2)\}$$

$$=\frac{4}{2}(9-6)=2\cdot3=6$$

(2) $$b_n=\frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$$

$$b_1=\frac{a_1}{3(1+1)(1+2)}=0.$$

①の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}=\frac{n+3}{n+1}\cdot\frac{3a_n+3^{n+1}-(n+1)(n+2)}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}+\frac{3^{n+1}-(n+1)(n+2)}{3^{n+1}(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$\therefore b_{n+1}=b_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}.$$

$$\therefore b_{n+1}-b_n=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}.$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-2}{2(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}=\frac{\frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$\therefore b_n=b_1+\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3n-3-n-1}{3(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$=\frac{n-2}{3(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\quad(n\geq 2)$$

$n=1$のとき

$$b_1=\frac{1-2}{3\cdot 2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=0$$

∴ これは $n=1$ のときも成りたつ.

(3) (2)から

$$a_n=3^n(n+1)(n+2)b_n$$

$$=3^n(n+1)(n+2)\left\{\frac{n-2}{3(n+1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}$$

$$=3^{n-1}(n^2-4)+\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$3^{n-1}(n^2-4)$は明らかに整数

$(n+1)(n+2)$は連続する整数の積であるから偶数。…㊟

∴ $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$は整数

(4) $3^{n-1}(n^2-4)$は3の倍数なので $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$を3で割った余りを調べれば十分.

(i) $n=3k$のとき

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)=\frac{1}{2}(3k+1)(3k+2)$$

$$=\frac{1}{2}(9k^2+9k+2)$$

$$=3\cdot\frac{3}{2}k(k+1)+1$$

㊟より $\frac{k(k+1)}{2}$は整数より 3で割った余りは1.

(ii) $n=3k+1$のとき

$$\frac{1}{2}(3k+2)(3k+3)$$

$$=3\cdot\frac{1}{2}(3k+2)(k+1)$$

kが偶数ならば $3k+2$が偶数

kが奇数ならば $k+1$が偶数

なので $\frac{1}{2}(3k+2)(k+1)$ は整数

$\therefore$ 3で割った余りは0

(iii) $n=3k+2$ のとき

$\frac{1}{2}(3k+3)(3k+4)$

$=3\cdot\frac{1}{2}(k+1)(3k+4)$

(ii)と同様に考えれば

3で割った余りは0

$\therefore$ nが3で割って1もしくは2余る

ときは a_nは3の倍数になり

nが3の倍数のときは a_nは

3で割って1余る

1から2020のうち 3の倍数は

3, 6, 9, $\cdots$, 2019 より

673コある。

673は 3で割ると1余るので

$\sum_{k=1}^{2020} a_k$ は 3で割ると1余る。

第4問

$A(3,3,-6)$

$B(2+2\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3},\ -4)$

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=24$ …①

(1) $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{3^2+3^2+(-6)^2}$

$=\sqrt{9+9+36}=\sqrt{54}$

$=3\sqrt{6}$

$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{(2+2\sqrt{3})^2+(2-2\sqrt{3})^2+(-4)^2}$

$=\sqrt{4+8\sqrt{3}+12+4-8\sqrt{3}+12+16}$

$=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3(2+2\sqrt{3})+3(2-2\sqrt{3})+24$

$=36$

(2) $\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ と表せる.

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$ より $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=s|\overrightarrow{OA}|^2+t\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=54s+36t=0$ …②

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=24$ より

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+t|\overrightarrow{OB}|^2$

$=36s+48t=24$ …③

②,③より $s=-\frac{2}{3}$, $t=1$

$\therefore |\overrightarrow{OC}|^2=\left|-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|^2$

$=\frac{4}{9}|\overrightarrow{OA}|^2-\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2$

$=\frac{4}{9}\cdot 54-\frac{4}{3}\cdot 36+48$

$=24-48+48=24$

$\therefore |\overrightarrow{OC}|=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

(3) $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

(2)より

$\overrightarrow{OC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

$\therefore \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

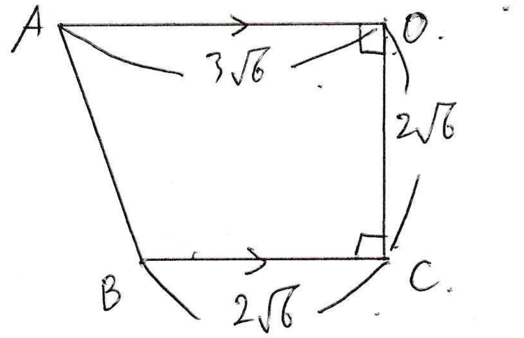
$=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}=(2,2,-4)$

$\therefore |\overrightarrow{CB}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{OA}|=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

と $\overrightarrow{CB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ より $\overrightarrow{OA}\parallel\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$ から四角形

OABCは下のようになる



∴四角形OABCは

平行四辺形ではないが

台形である。(③)

又、面積は図から

$(3\sqrt{6}+2\sqrt{6})\times 2\sqrt{6}\times\frac{1}{2}$

$=5\sqrt{6}\times 2\sqrt{6}\times\frac{1}{2}=30$.

(4) $D(x, y, 1)$ とおくと

$\vec{OA}\cdot\vec{OD}=0$ より

$3x+3y-6=0$

$x+y=2$ …①

$\vec{OC}\cdot\vec{OD}=2\sqrt{6}$ より.

$\vec{OC}=-\frac{2}{3}(3,3,-6)+(2+2\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3}, -4)$

$=(2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 0)$

なので

$2\sqrt{3}x-2\sqrt{3}y=2\sqrt{6}$.

$x-y=\sqrt{2}$.

$x=\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ y=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore D\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

$|\vec{OD}|=\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1}$

$=\sqrt{1+\sqrt{2}+\frac{1}{2}+1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}+1}$

$=\sqrt{4}=2$ なので

$\vec{OC}\cdot\vec{OD}=|\vec{OC}|\cdot|\vec{OD}|\cdot\cos\angle COD$

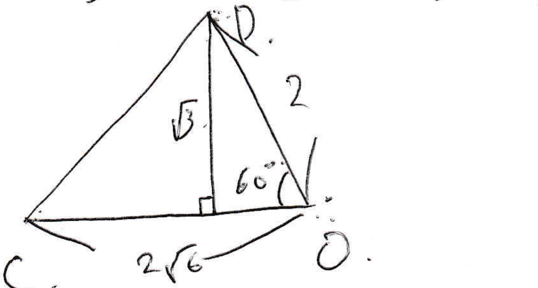
ゆえ、

$2\sqrt{6}=2\sqrt{6}\cdot 2\cdot\cos\angle COD$.

$\cos\angle COD=\frac{1}{2}$

$\therefore \angle COD=60^\circ$

$\alpha\perp\beta$ より △OCD を考えると



図から D から OC におろした垂線が求める高さである

$\therefore$ 四面体 OABC の高さは $\sqrt{3}$

であり

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{BA}|^2|\vec{BC}|^2-(\vec{BA}\cdot\vec{BC})^2}$

$|\vec{BA}|^2=|\vec{OA}-\vec{OB}|^2=|\vec{OA}|^2-2\vec{OA}\cdot\vec{OB}+|\vec{OB}|^2$

$=54-2\cdot 36+48=30$.

$|\vec{BC}|^2=|\vec{OC}-\vec{OB}|^2=|\vec{OC}|^2-2\vec{OB}\cdot\vec{OC}+|\vec{OB}|^2$

$=24-2\cdot 24+48=24$

$(\vec{BA}\cdot\vec{BC})^2=\{(\vec{OA}-\vec{OB})\cdot(\vec{OC}-\vec{OB})\}^2$

$=\{\vec{OA}\cdot\vec{OC}-\vec{OA}\cdot\vec{OB}-\vec{OB}\cdot\vec{OC}+|\vec{OB}|^2\}^2$

$=(-36-24+48)^2=12^2$

$\therefore \frac{1}{2}\sqrt{30\cdot 24-144}=\frac{1}{2}\sqrt{576}$

$=12$. $\therefore$ 体積は $12\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}$

$=4\sqrt{3}$.