第1問

[1]

(1) $l : y=(a^2-2a-8)x+a$

(傾き)<0 より

$a^2-2a-8<0$

$(a-4)(a+2)<0$

∴ $-2<a<4$

(2) l と x 軸との交点の座標は

$(a^2-2a-8)x+a=0$

$x=-\dfrac{a}{a^2-2a-8}$ (∵ $a^2-2a-8\neq0$)

∴ $b=-\dfrac{a}{a^2-2a-8}>0$

(i) $0<a<4$ のとき

$a^2-2a-8<0$ なので

$\dfrac{a}{a^2-2a-8}<0$ ∴ $b>0$

(ii) $a>4$ のとき

$a^2-2a-8>0$ なので

$\dfrac{a}{a^2-2a-8}>0$ ∴ $b<0$

∴求める範囲は $0<a<4$

また $a\leqq0$ として

(i) $-2<a\leqq0$ のとき

$a^2-2a-8<0$ なので

$\dfrac{a}{a^2-2a-8}\geqq0$ ∴ $b\leqq0$

(ii) $a<-2$ のとき

$a^2-2a-8>0$ なので

$\dfrac{a}{a^2-2a-8}<0$ ∴ $b>0$

∴求める範囲は $a<-2$

$a=\sqrt{3}$ より

$$b=-\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}-8}=-\frac{\sqrt{3}}{-5-2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(5-2\sqrt{3})}{(5+2\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}-6}{25-12}=\frac{5\sqrt{3}-6}{13}$$

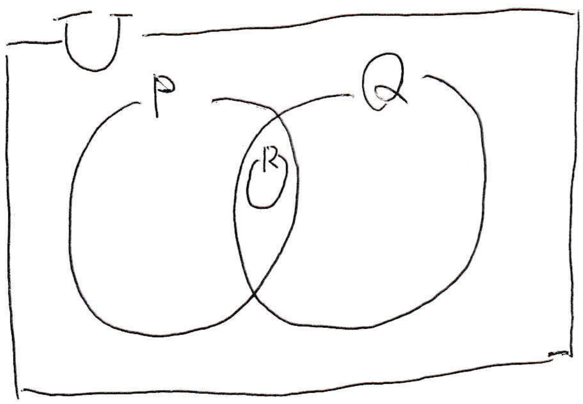
[2]

$P=\{n \mid n$ は4の倍数$\}$

$Q=\{n \mid n$ は6の倍数$\}$

$R=\{n \mid n$ は24の倍数$\}$

全体集合を U とすると U, P, Q, R の関係は下のようになる。



(1) 32は

4の倍数であるが、6の倍数ではない。また、$R \subset (P \cap Q)$ なので、

$32 \in P \cap \overline{Q}$

とわかる。(②)

(2) 4と6の最小公倍数は、12より $P \cap Q$ に属する最小の自然数は

12

また、12は24の倍数ではなく集合でもないので、

$12 \notin R$ (④)

(3) $12 \in (P \cap Q) \cap \overline{R}$ であることに注意すると、

⓪ (pかつq) $\Rightarrow \overline{r}$ は12を満たす。

① (pまたはq) $\Rightarrow \overline{r}$ は12をみたす。

② $r \Rightarrow$ (pかつq) は真

③ (pかつq) $\Rightarrow r$ は

12が反例となる (③)

[3]

Gは

$y = (x-c)\{x-(c+4)\}$

と表せるから展開して整理すると

$y = x^2 + (-2c-4)x + c(c+4)$

$= x^2 - 2(c+2)x + c(c+4)$

$f(x) = x^2 - 2(c+2)x + c(c+4)$

とおくと、Gが、(3, 0), (3, −3) を両端とする線分と共有点を持つ条件は、

$-3 \leqq f(3) \leqq 0$

$\therefore -3 \leqq c^2 - 2c - 3 \leqq 0$

これを解くと

$-1 \leqq c \leqq 0,\quad 2 \leqq c \leqq 3$

別 (数Ⅱ)

$x^2 - 2(c+2)x + c(c+4) - y = 0$

と変形して左辺を $g(x, y)$ とおくと

条件から $g(3, 0) \cdot g(3, -3) \leqq 0$

$\therefore (c^2 - 2c - 3) \cdot (c^2 - 2c) \leqq 0$

$(c-3)(c+1)c(c-2) \leqq 0$

$\therefore y = c(c+1)(c-2)(c-3)$ のグラフを考えれば、

$-1 \leqq c \leqq 0,\quad 2 \leqq c \leqq 3$

(2)

$2 \leqq c \leqq 3$ とし

Gが$(3, -1)$を通るから

$-1 = 9 - 6(c+2) + c(c+4)$

$c^2 - 2c - 3 = -1$

$c^2 - 2c - 2 = 0$

$c = 1 \pm \sqrt{1+2} = 1 \pm \sqrt{3}$

$2 \leqq c \leqq 3$ より

$c = 1 + \sqrt{3}$

$\therefore f(x) = \{x - (c+2)\}^2 - (c+2)^2 + c(c+4)$

$= \{x - (c+2)\}^2 - c^2 - 4c - 4 + c^2 + 4c$

$= \{x - (c+2)\}^2 - 4$

になる。このときGは$y = x^2$の

グラフをx軸方向に$3+\sqrt{3}$

y軸方向に-4

平行移動したものである。

又、このときy切片の座標は

$(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}+4)$

$= (1+\sqrt{3})(5+\sqrt{3})$

$= 3 + 6\sqrt{3} + 5 = 8 + 6\sqrt{3}$

第2問

[1] △DBCで余弦定理を用いると

$$BD^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3}{4}$$

$$= 8+2-6 = 4$$

$\therefore BD = 2 \quad (\because BD>0)$

$\cos\angle BCD = \frac{3}{4}$ より $\sin\angle BCD = \frac{\sqrt{7}}{4}$

∴ △DBCで正弦定理を用いると

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sin\angle BDC} = \frac{2}{\frac{\sqrt{7}}{4}} \left(= \frac{8}{\sqrt{7}}\right)$$

$$\therefore \sin\angle BDC = \frac{\sqrt{7}}{8}\cdot 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$\sin\angle ADC = \sin(180^\circ - \angle BDC)$$

$$= \sin\angle BDC = \frac{\sqrt{14}}{4} \cdots (*)$$

角の二等分線の定理から

$CA : CB = AD : BD$

$AC : 2\sqrt{2} = AD : 2$

$2AC = 2\sqrt{2}AD$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

∴ $AD = x$ とおくと $AC = \sqrt{2}x$ とおけるので △ADCで余弦定理を用いると

$$x^2 = (\sqrt{2}x)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\cdot\sqrt{2}x\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3}{4}$$

$$= 2x^2 + 2 - 3x$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-2)(x-1) = 0$$

$$x = 1, 2$$

$AD = 2$ のとき、△ABCは $AC = BC$ の二等辺三角形となるので (*)に矛盾。∴ $AD = 1$

△ABCの面積は

$$\triangle ABC = \triangle BDC + \triangle ADC$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{14}}{4} + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$= \frac{6\sqrt{7}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$$

∴ △ABCの外接円の半径をRとすると

$$\frac{3\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{4R} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$$

$$R = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

[2]

(1) ⓪ 98コが1で1コ100があると $Q_1 = 1$, $Q_3 = 1$ であるが平均は2だから成り立たない

① 例外はある。(消去法による)

② 中央値と同じデータが複数個あると成り立たない

③ 1個削除すると個数は98コとなるから、Qは元と変わらない

④ ③同様 Q_1とQ_3と同じ，
データが複数個あったら成り立
たない

⑤ Q_1より小さい値と
Q_3より大きい値を削除
するということは残りのデータ
の最小値がQ_1で最大値
がQ_3となるということ。
つまりその範囲は
$Q_3 - Q_1$となり
四分位範囲に等しい
∴ 正しいのは ③，⑤

(2) (Ⅰ) P10の四分位範囲が
1でこれている。(×)

(Ⅱ) 箱ひげ図の箱の中の
線を見れば明白。(×)

(Ⅲ) P1の最大値とP47の
最小値を比較すれば
よい (○)

∴ 組み合わせとして正しいのは
⑥

(3) 最小値を見ればあてはまるのは
⓪，③，④，⑤
最大値を見ればあてはまるのは
④，⑥，⑦
以上から対応するのは ④

(4) 直線は傾き1で切片が
5.5〜7.5であるから
差が5.0〜7.5のデータは
3人。これにあてはまるヒストグラムは②のみである。

第3問

[1] ⓪ 少なくとも1回は表 $\xrightarrow{\text{余事象}}$ すべて裏

すべて裏になる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \longrightarrow$$

求める確率は

$$1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32} \fallingdotseq 0.969 > 0.95$$

よって ⓪は正しい

① ・赤、白の球のそれぞれの個数がわからない

・5回 → 3回 なので $\frac{3}{5}$

これで確率を求めることはできない。

反復試行の公式を使っても　①は誤り

② $\boxed{\text{い　ろ　ろ　は　は}} \xrightarrow{\text{2枚}}$ ○○

文字が異なる確率 $\xrightarrow{\text{余事象}}$ 同じ文字がでる確率

同じ文字（ろとろ、はとは）がでる確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} + \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

よって 文字が異なる確率は $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$　②は正しい

③ 人「オモテ」と発言するのは

2人とも
オモテを見て「Aオモテ かつ Bオモテ」　または　ウラを見て「Aオモテ かつ Bオモテ」

↑ 正しい → 0.9×0.9　　↑ 正しくない → 0.1×0.1

よって求める確率は

$$p = \frac{0.9 \times 0.9}{0.9 \times 0.9 + 0.1 \times 0.1} = \frac{0.81}{0.82} = \frac{81}{82} \fallingdotseq 0.988$$

$p \leqq 0.9$ とならないので
③は誤り

故に 正しいのは ⓪ と ②

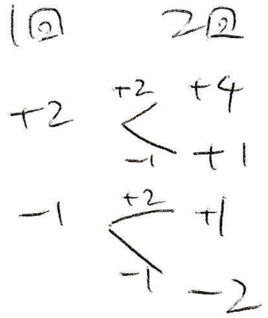
1枚のコイン

[2] 最大5回、表+2点、裏−1点
(オモテ) (うラ)

0点→終わり、or 5回で終わり

(1) 2回→−2点

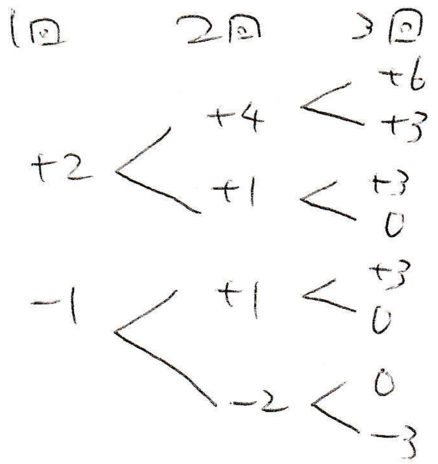
樹形図を書く。



−2点になるのは
うラ→うラのとき $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

+1点になるのは
オモテ→うラ、うラ→オモテの2通り
$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{2}$

(2) 2回目まで0点になることはないので、
3回目でなる



3回投げて0点になるのは、
左の樹形図より $\frac{3}{8}$

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{8}\right)$

(3) オモテ x 回、うラ $5-x$ 回とすると

$$2\times x+(-1)\times(5-x)=4$$
$$2x-5+x=4$$
$$x=3$$

よってオモテ3回、うラ2回のとき

5回中オモテが3回であればいいので

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\times\frac{1}{8\times 4}=\frac{5}{16}$$

ここから3回投げて0点になる確率

$${}_3C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{32}$$ を引く

よって $\frac{5}{16}-\frac{3}{32}=\frac{7}{32}$

(4) ゲームが終了した時点で持ち点が4点である事象をA

コインを2回投げて終わって持ち点が1点である事象をB

とおくと求める確率は $P_A(B)$ である。

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$ であり、

(3)から

$$P(A) = \frac{7}{32}$$

$P(A \cap B)$ は 2回目までに表が1回裏が1回出て ①

3回目に表が出る確率 ② であるから、

$$\underbrace{2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}_{①} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{②} \times \underbrace{{}_2C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{表が1回裏が1回出る確率}}$$

$$= \frac{1}{8}$$

∴ 求める確率は

$$P_A(B) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{32}} = \frac{4}{7}$$ //

第4問

(1)

$100x - x = 236.\dot{3}\dot{6} - 2.\dot{3}\dot{6}$

$= 234$

$99x = 234$ より

$x = \frac{234}{99} = \frac{26}{11}$

(2)

$49y - y = 2 \cdot 7^2 + a \cdot 7 + b - 2$

$48y = 98 + 7a + b - 2$

$y = \frac{96 + 7 \times a + b}{48}$

(i) 分母が4であるから

$96 + 7a + b$が

$12 \times$(奇数) の形で表せる

数であればよい。

また、96は12の倍数で

あるから 求める条件は

$7a + b$が12の倍数に

なればよい。

更に $96 = 12 \times 8$ なので

$7a + b$ が $12 \times$(奇数)

となればよい

a, bに 0〜6 を代入したとき

このようになるのは

$(a, b) = (1, 5), (7, 3), (5, 1)$

のみであるが、$a \neq b$より

$(a, b) = (1, 5), (5, 1)$のみ。

∴これらを代入して

$y = \frac{9}{4}, \frac{11}{4}$

$\left(\begin{array}{l} 7 \times a + b = 36 \\ a = 5, \ b = 1 \end{array} \right)$

(ii)

$y - 2 = \frac{96 + 7a + b}{48} - 2$

$= \frac{7a + b}{48}$

条件をみたすのは

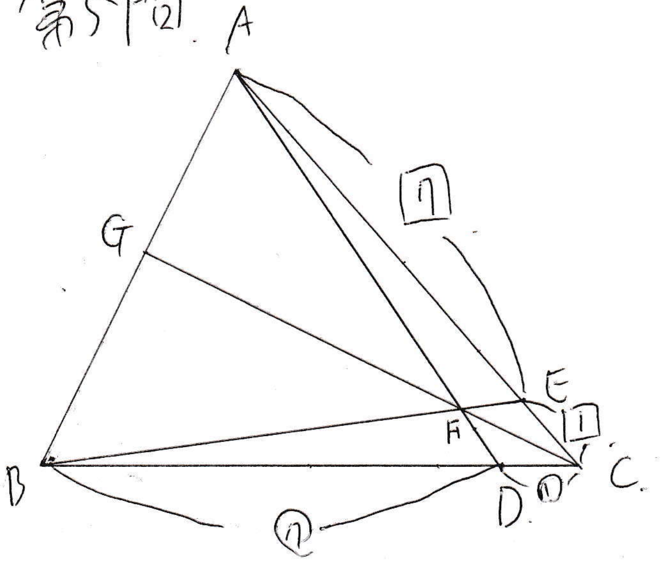
$7a + b$ が 48以外の

約数となることである。

a＼b	0	1	2	3	4	5	6
0		O	O	O	O		O
1						O	
2							
3							
4							
5							
6							

上記より 6.ｴ

第5問(2)



チェバの定理より

$$\frac{GB}{AG} \times \frac{DC}{BD} \times \frac{EA}{CE} = 1$$

$$\therefore \frac{GB}{AG} \times \frac{1}{7} \times \frac{7}{1} = 1 \quad \therefore \frac{GB}{AG} = 1$$

メネラウスの定理より

$$\frac{FD}{AF} \times \frac{BC}{DB} \times \frac{EA}{CE} = 1$$

$$\therefore \frac{FD}{AF} \times \frac{8}{7} \times \frac{7}{1} = 1 \quad \therefore \frac{FD}{AF} = \frac{1}{8}$$

同様に

$$\frac{FC}{GF} \times \frac{DB}{CD} \times \frac{AG}{BA} = 1$$

$$\therefore \frac{FC}{GF} \times \frac{7}{1} \times \frac{1}{2} = 1 \quad \therefore \frac{FC}{GF} = \frac{2}{7}$$

$\triangle BGC = S$ とおくと

$\triangle BFG = \frac{7}{9}S$, $\triangle CDG = \frac{1}{8}S$

$$\therefore \frac{\triangle CDG}{\triangle BFG} = \frac{\frac{1}{8}S}{\frac{7}{9}S} = \frac{9}{56}$$

4点 B, D, F, G が同一円周上にあるから方べきの定理より

$$AG \times AB = AF \times AD$$

$FD = 1$ より $AF = 8$, $AD = 9$

$\therefore AB = \frac{1}{2}AG$ なので

$$\frac{1}{2}(AB)^2 = 8 \times 9 = 72$$

$(AB)^2 = 144$　$AB = 12$

更に $AE = 3\sqrt{7}$ なので

$$AE \cdot AC = 3\sqrt{7} \times \frac{8}{7} \times 3\sqrt{7} = 72$$

$\triangle AEG$ と $\triangle ABC$ において

$\angle A$ は共通 …①

$AG : AC = 6 : \frac{8}{7} \times 3\sqrt{7}$

$= \sqrt{7} : 4$ …②

$AE : AB = 3\sqrt{7} : 12$

$= \sqrt{7} : 4$ …③

①,②,③より $\triangle AEG \sim \triangle ABC$

$\therefore \angle AEG = \angle ABC$ (②)